ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1979

OPTION M'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

Dans tout le problème, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des des rèels. Pour tout entier $k \geqslant 1$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction complexe f définie sur $\mathbb{R}$ et $f^{(0)}$ désigne f elle-même. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions complexes f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout couple $(h, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la fonction $x \longmapsto |x^h f^{(k)}(x)|$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

I

1 - a) Montrer que $\mathcal{E}$ muni des opérations d'addition et de multiplication des fonctions et de la multiplication par les complexes est une algèbre sur le corps des complexes.

b) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente.

c) $\mathcal{E}$ étant également un espace vectoriel complexe, montrer que l'application définie pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ par

$$(f, g) \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx$$

est un produit scalaire hermitien sur cet espace vectoriel complexe.

On notera désormais $(f \mid g)$ l'intégrale précédente et $\| f \|$ la norme de f associée à ce produit scalaire. D'autre part, pour tout couple (U, V) d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, on notera U V l'endomorphisme composé $U \circ V$; pour tout entier $n \geqslant 1$, U^n désignera le composé de n endomorphismes égaux à U ; U^0 sera par convention égal à l'endomorphisme identique I. Enfin, on appelle valeur propre de U tout nombre complexe λ tel que $U - \lambda I$ ne soit pas injectif, et fonction propre de U associée à λ tout élément du noyau de $U - \lambda I$.

.../...

2 - Pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, avec $i^2 = -1$,

$$(A f)(x) = i f'(x) + i x f(x) \qquad (B f)\, x = i f'(x) - i x f(x)$$

$$(T f)(x) = - f''(x) + x^2 f(x) .$$

a) Montrer qu'on définit ainsi trois endomorphismes A, B, T de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

b) Trouver dans $\mathcal{E}$ les noyaux de A et de B.

c) Calculer A B et B A en fonction de T et de I. En déduire une relation linéaire entre A T - T A et A et une relation linéaire entre B T - TB et B.

d) Soit $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Comparer $(A f \mid g)$ et $(f \mid B g)$, puis $(T f \mid g)$ et $(f \mid T g)$.

3 - a) Soit λ une valeur propre de T et f une fonction propre de T associée à λ. Etablir les égalités

$$\| A f \|^2 = (\lambda - 1) \| f \|^2 \qquad \| B f \|^2 = (\lambda + 1) \| f \|^2$$

$$TA f = (\lambda - 2) A f \qquad TB f = (\lambda + 2) B f$$

b) Montrer que les valeurs propres de T sont toutes réelles et que 1 est la plus petite d'entre elles. Quel est le noyau de T ? Déterminer les fonctions propres de T associées à la valeur propre 1.

c) Montrer que toute valeur propre de T est un entier impair positif et que, si f_n est une fonction propre de T associée à la valeur propre $\lambda_n = 2n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $A^n f_n$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1.

d) Montrer réciproquement que tout entier impair positif $2n + 1$ est une valeur propre de T et que, si f_0 est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1, $f_n = B^n f_0$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre $2n + 1$.

4 - Soit k un entier strictement positif.

a) Etablir l'égalité

$$B^k A^k = (A B - 2k I) B^{k-1} A^{k-1}$$

.../...

b) Montrer que si f est une fonction propre de T, c'est aussi une fonction propre de $B^k A^k$.

c) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions propres de T associées à la valeur propre $2n+1$? Comment ces fonctions propres se déduisent-elles des éléments du noyau de A ?

II

Dans toute cette partie, on note c le nombre réel positif $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^{-1/2}$, dont on ne cherchera pas à calculer la valeur.

1 - On définit dans $\mathcal{E}$ la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\theta_0(x) = c\, e^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad \theta_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} B\, \theta_n .$$

Montrer que $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale de fonctions propres de T respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_n = 2n+1$.

2 - a)- Calculer, pour $n \geqslant 1$, $A\, \theta_n$ en fonction de θ_{n-1}.

b) En déduire pour la fonction $x \longmapsto x\, \theta_n(x)$ une expression linéaire par rapport à θ_{n-1} et θ_{n+1}.

c) Montrer que la suite $\left(|\theta_n(0)| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que la suite $\left(\frac{|\theta_n'(0)|}{\sqrt{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3 - a) On note e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto e^{i\sqrt{2n+1}\, x}$, $\overline{e}_n$ son imaginaire conjuguée, et on pose

$$\varphi_n = \theta_n' e_n - \theta_n e_n' \qquad \text{et} \qquad \psi_n = \theta_n' \overline{e}_n - \theta_n \overline{e}_n'$$

Exprimer φ_n' et ψ_n' à l'aide de θ_n, e_n et $\overline{e}_n$, puis φ_n et ψ_n à l'aide d'intégrales contenant θ_n et de constantes convenables.

.../...

b) En déduire une expression de θ_n linéaire par rapport à e_n, $\overline{e}_n$ et à la fonction $x \longmapsto \int_0^x u^2\, \theta_n(u)\, \sin\left[\sqrt{2n+1}\,(x-u)\right] du$.

c) Montrer que si x appartient à un intervalle compact de $\mathbb{R}$ la suite $(|\theta_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet des bornes indépendantes de x.

4 - Soit $g \in \mathcal{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n(g) = (g \mid \theta_n)$.

a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$ la suite $((2n+1)^p\, |a_n(g)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Montrer que la série de terme général $a_n(g)\,\theta_n$ converge uniformément par rapport à x sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ vers une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$, et qu'on notera $\hat{g}$.

c) Montrer que pour tout couple (r, s) d'entiers naturels la série de terme général $A^r B^s (a_n(g)\,\theta_n)$ converge uniformément par rapport à x sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

d) En déduire que $\hat{g}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail